

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGÔ THỊ HỒNG

TOÁN TỬ HAUSDORFF VÀ THỂ VỊ RIESZ
TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

Ngành: Toán giải tích

Mã số Ngành: 9460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2025

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn khoa học:

1. PGS.TS. Lý Kim Hà
2. PGS.TS. Đào Văn Dương

Phản biện 1: PGS.TS. Nguyễn Tuấn Duy

Phản biện 2: PGS.TS. Trần Vũ Khanh

Phản biện 3: PGS.TS. Kiều Phương Chi

Phản biện độc lập 1: miễn

Phản biện độc lập 2: miễn

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia TP. HCM, vào hồi ... giờ... ngày... tháng... năm 2025.

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

- Thư viện Khoa học Tổng hợp TP. HCM
- Thư viện Đại học Quốc gia TP. HCM
- Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - TP. HCM

CHƯƠNG 1

MỞ ĐẦU

Giải tích điều hòa là một trong những lĩnh vực toán học quan trọng, thu hút nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Lĩnh vực này có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong một số lĩnh vực toán học khác, chẳng hạn như phương trình đạo hàm riêng, lý thuyết toán tử, lý thuyết các không gian hàm, cơ học lượng tử, xử lý tín hiệu và nhiều lĩnh vực khoa học khác. Một trong những vấn đề cốt lõi của giải tích điều hòa đó là nghiên cứu tính bị chặn của các toán tử trên các không gian hàm, cụ thể là bài toán chứng minh bất đẳng thức

$$\|T(f)\|_Y \leq C\|f\|_X, \quad (1.1)$$

trong đó C là hằng số dương, X và Y là hai không gian hàm với chuẩn (hoặc tựa chuẩn) tương ứng là $\|\cdot\|_X$ và $\|\cdot\|_Y$. Bài toán được đặt ra là cho trước hai không gian hàm X và Y , cần tìm các điều kiện để bất đẳng thức (1.1) đúng, và nếu có thể thì xác định hằng số C tốt nhất. Tuy nhiên, các điều kiện cần về tính bị chặn được đưa ra, nói chung, không phải là điều kiện đủ. Do đó, việc tìm kiếm các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử, cũng như xác định hằng số C tốt nhất là một bài toán thú vị và hấp dẫn, đã từ lâu thu hút nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, và trong nhiều trường hợp, theo sự hiểu biết của chúng tôi, đây là lớp bài toán thuộc loại rất khó.

Đối tượng nghiên cứu chính của luận án là nghiên cứu lý thuyết các lớp toán tử Hausdorff, thể vị Riesz và các giao hoán tử của chúng trên các không gian hàm như không gian Morrey, Herz, Morrey-Herz có trọng, với các biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, không gian tâm BMO có trọng, trong đó các hàm trọng được xét ở đây thuộc các lớp trọng lũy thừa, lớp trọng thuần nhất, lớp trọng Muckenhoupt, lớp trọng tùy ý trên trường thực, trên không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ và trên không gian vectơ $\mathbb{Q}_p^n$. Các lớp toán tử này chứa đựng hoặc có mối liên hệ mật thiết với nhiều toán tử cổ điển quan trọng trong giải tích điều hòa, chẳng hạn như toán tử Hardy, toán tử Cesàro, toán tử cực đại Calderón, toán tử Abel, toán tử tích phân phân thứ Riemann-Liouville, toán tử Hardy-Littlewood-Pólya, toán tử Hilbert, toán tử cực đại Hardy-Littlewood, toán tử tích phân kỳ dị, ...

Phạm vi nghiên cứu của luận án thuộc lĩnh vực Giải tích điều hòa, tập trung chính vào nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff, thể vị Riesz và các giao hoán tử của chúng trên một số không gian hàm. Ngoài phần mở đầu, tổng quan, các phương pháp nghiên cứu, kết luận và tài liệu tham khảo, các kết quả chính của luận án được trình bày trong Chương 4 với các nội dung như sau:

- Nội dung 1: Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik và giao hoán tử với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz trên các không gian Morrey và Morrey-Herz có trọng.
- Nội dung 2: Giới thiệu toán tử Hausdorff tích suy rộng và nghiên cứu tính bị chặn của lớp toán tử mới này trên các không gian Morrey và Morrey-Herz hai trọng, đồng thời chúng tôi cũng đưa ra một số áp dụng của chúng.
- Nội dung 3: Ước lượng chuẩn của toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính trên các không gian Morrey và Herz hai trọng bao gồm trọng lũy thừa, trọng tùy ý và một số áp dụng.
- Nội dung 4: Nghiên cứu tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz và các ước lượng Lipschitz và ước lượng tâm BMO có trọng cho các giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz trên không gian Morrey-Herz hai trọng.
- Nội dung 5: Nghiên cứu tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz với nhân thô và giao hoán tử với biểu trưng thuộc không gian tâm BMO có trọng trên không gian p -adic Morrey hai trọng và không gian p -adic Herz hai trọng.

CHƯƠNG 2

TỔNG QUAN

Toán tử Hausdorff là một trong những toán tử quan trọng trong giải tích điều hòa và đã được nghiên cứu chuyên sâu bởi các ứng dụng của nó. Nguồn gốc của toán tử này trên trường thực có thể bắt nguồn từ các công trình của W. A. Hurwitz và L. L. Silverman [W. A. Hurwitz, L. L. Silverman (1917), On the consistency and equivalence of certain definitions of summabilities, Trans. Am. Math. Soc.] và sau đó được đề xuất bởi F. Hausdorff [F. Hausdorff (1921), Summationmethoden und Momentfolgen. I, Mathematische Zeitschrift] để nghiên cứu tính khả tổng của chuỗi số, chuỗi lũy thừa. Toán tử Hausdorff một chiều được định nghĩa bởi

$$\mathcal{H}_\Phi f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) dt, \quad (2.1)$$

trong đó Φ là hàm khả tích địa phương trên $(0, \infty)$. Đặc biệt, toán tử Hausdorff chứa đựng hoặc có mối liên hệ mật thiết với nhiều toán tử cổ điển trong giải tích, chẳng hạn, toán tử Hardy, toán tử trung bình Hardy-Littlewood có trọng, toán tử Cesàro, toán tử tích phân phân thứ Riemann-Liouville, toán tử Hardy-Littlewood-Pólya, ... khi chọn hàm Φ thích hợp.

Trong những thập kỷ gần đây, toán tử Hausdorff và các biến thể của nó cũng như các ứng dụng của chúng là một trong các chủ đề toán học thú vị và hấp dẫn, thu hút nhiều nhà toán học trong nước và quốc tế quan tâm nghiên cứu trong nhiều bối cảnh khác nhau. Vào năm 2002, toán tử Hausdorff được mở rộng lên không gian nhiều chiều bởi G. Brown và F. Móricz [G. Brown, F. Móricz (2002), Multivariate Hausdorff operators on the spaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, J. Math. Anal. Appl.]. Toán tử này được định nghĩa như sau

$$\mathcal{H}_{\Phi,A}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(t)}{|t|^n} f(A(t)x) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

trong đó Φ là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}^n$, $A(t)$ là một ma trận cỡ $n \times n$ thỏa mãn $\det A(t) \neq 0$ với hầu khắp t thuộc giá của Φ , và x là vectơ n -cột. Rõ ràng, khi $\Phi(t) = |t|^n \psi(t_1) \chi_{[0,1]^n}(t)$, trong đó $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ là một hàm đo được và $A(t) = t_1 I_n$ với $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, thì toán tử $\mathcal{H}_{\Phi,A}$ trở thành toán tử trung bình Hardy-Littlewood có trọng được định nghĩa bởi C. Carton-Lebrun và M. Fosset [C. Carton-Lebrun, M. Fosset (1984), Moyennes et quotients de Taylor dans BMO, Bull. Soc. Roy. Sci. Liege] có dạng như sau

$$\mathcal{U}_\psi(f)(x) = \int_0^1 \psi(t) f(tx) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Bởi cách đặt $\Phi(t) = |t|^n \psi(t_1) \chi_{[0,1]^n}(t)$ và $A(t) = s(t_1) I_n$ với $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, trong đó $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đo được, ta thu được toán tử Hardy-Cesàro liên kết với đường cong tham số $s(x, t) := s(t)x$ do N. M. Chuong và H. D. Hưng [N. M. Chuong, H. D. Hung (2014), Weighted BMO-bounds for a new generalized weighted Hardy-Cesàro operator, Integral Transforms Spec. Funct.] đề xuất. Cụ thể, toán tử Hardy-Cesàro được định nghĩa bởi

$$\mathcal{U}_{\psi,s}(f)(x) = \int_0^1 \psi(t) f(s(t)x) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Gần đây, lý thuyết toán tử trung bình Hardy-Littlewood có trọng, toán tử Hardy-Cesàro, và các toán tử Hausdorff được mở rộng trong nhiều bối cảnh khác nhau và được nghiên cứu trên nhiều không gian hàm như không gian Lebesgue, không gian Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz, không gian Hardy, và không gian BMO kể cả trường hợp có trọng.

Trong những thập kỷ vừa qua, với những ứng dụng mạnh mẽ của giải tích p -adic trong lĩnh vực vật lý toán, cũng như trong khoa học và công nghệ, nhiều lý thuyết trên trường thực được chuyển sang nghiên cứu trên trường số p -adic và đã thu được nhiều ứng dụng hữu ích. Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại định nghĩa của toán tử trung bình Hardy-Littlewood có trọng trên trường số p -adic. Cho $\psi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm đo được theo độ đo Haar. Toán tử p -adic Hardy-Littlewood có trọng được định nghĩa như sau

$$\mathcal{U}_\psi^p f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} f(tx) \psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (2.5)$$

Ước lượng chuẩn của toán tử $\mathcal{U}_\psi^p$ được chỉ ra trên không gian Lebesgue và không gian BMO bởi K. S. Rim và J. Lee [K. S. Rim, J. Lee (2006), Estimates of weighted Hardy-Littlewood averages on the p -adic vector space, J. Math. Anal. Appl.], và trên không gian Morrey-Herz và không gian Triebel-Lizorkin bởi N. M. Chương và Đ. V. Dương [N. M. Chuong, D. V. Duong (2013), Weighted Hardy-Littlewood operators and commutators on p -adic functional spaces, p -Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.].

Điều thú vị là toán tử $\mathcal{U}_\psi^p$ có liên hệ chặt chẽ với một số phương trình giả vi phân trên trường p -adic. Cụ thể hơn, A. Kochubei [A. Kochubei (2014), Radial solutions of non-Archimedean pseudodifferential equations, Pacific J. Math.] đã nghiên cứu bài toán Cauchy cho các phương trình giả vi phân p -adic có dạng

$$\begin{cases} D^\alpha u + a(|x|_p)u = f(|x|_p), & x \in \mathbb{Q}_p, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

trong đó D^α là toán tử Vladimirov có bậc α , a, f là các hàm liên tục cho trước, và u là hàm bán kính cần tìm. Nghiệm của phương trình giả vi phân dạng (2.6) được biểu diễn thông qua tích phân phân thứ p -adic Riemann-Liouville, cụ thể là, $u = \mathcal{R}_\alpha^p(f)$, trong đó

$$\mathcal{R}_\alpha^p(f)(x) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|t|_p \leq |x|_p} (|x - t|_p^{\alpha-1} - |t|_p^{\alpha-1}) f(t) dt.$$

Rõ ràng rằng,

$$\mathcal{R}_\alpha^p(f)(x) = (\mathcal{U}_{\psi_1}^p f(x) - \mathcal{U}_{\psi_2}^p f(x)) |x|_p^\alpha, \quad (2.7)$$

trong đó

$$\psi_1(t) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} |1 - t|_p^{\alpha-1}, \quad \text{và} \quad \psi_2(t) = \psi_1(1 - t).$$

Từ đẳng thức (2.7) cho chúng ta thấy rằng việc mở rộng nghiên cứu toán tử p -adic Hardy-Littlewood có trọng $\mathcal{U}_\psi^p$ trên các không gian có trọng lũy thừa là sự phát triển một cách tự nhiên về mặt lý thuyết và có ứng dụng vào các phương trình giả vi phân p -adic.

Năm 2010, S. S. Volosivets [S. S. Volosivets (2010), Multidimensional Hausdorff operator on p -adic field, p -Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.] đã giới thiệu toán tử p -adic Hausdorff được định nghĩa như sau

$$\mathcal{H}_{\varphi,A}^p(f)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(y) f(A(y)x) dy, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (2.8)$$

Điều đáng chú ý là một số toán tử quan trọng trong giải tích p -adic như toán tử trung bình p -adic Hardy-Littlewood có trọng, toán tử p -adic Hardy, toán tử p -adic Hilbert, toán tử p -adic Hardy-Littlewood-Pólya và toán tử p -adic Hardy-Cesàro là các trường hợp đặc biệt của toán tử p -adic Hausdorff.

Một hướng nghiên cứu thú vị khác mà chúng tôi lựa chọn trong luận án này đó là nghiên cứu tính bị chặn của thể vị Riesz có quan hệ mật thiết với toán tử Hausdorff, nó là tổng quát hóa của tích phân phân thứ Riemann-Liouville lên không gian nhiều chiều. Trong [M. H. Taibleson (1975), *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, University of Tokyo Press, Tokyo, Japan], M. H. Taibleson giới thiệu và nghiên cứu thể vị p -adic Riesz có dạng

$$I_\alpha^p(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(y)}{|x-y|_p^{n-\alpha}} dy, \quad (2.9)$$

trong đó $f : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_n(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-n}}{1-p^{-\alpha}}$, với p là số nguyên tố và $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, trên các trường địa phương.

Trong những thập kỷ gần đây, thể vị p -adic Riesz nhận được sự quan tâm và nghiên cứu rộng rãi trong nhiều bối cảnh khác nhau bởi các ứng dụng của nó. Điển hình, Y. C. Kim [Y. C. Kim (2010), *A simple proof of the p -adic version of the Sobolev embedding theorem*, Commun. Korean. Math. Soc.] đã chứng minh bất đẳng thức p -adic Hardy-Littlewood-Sobolev bằng cách sử dụng kỹ thuật biểu diễn Calderón-Zygmund. Sau đó, S. S. Volosivets [S. S. Volosivets (2013), *Maximal function and Riesz potential on p -adic linear spaces*, p -Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.] đã mở rộng nghiên cứu thể vị p -adic Riesz trên không gian p -adic Morrey suy rộng và cho thấy sự tương tự các kết quả trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ do E. Nakai [E. Nakai (1994), *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr.] đưa ra. Hơn nữa, Q. Y. Wu và Z. W. Fu [Q. Y. Wu, Z. W. Fu (2015), *Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities on p -adic central Morrey spaces*, J. Funct. Spaces] mở rộng nghiên cứu bất đẳng thức Hardy-Littlewood-Sobolev trên không gian tâm p -adic Morrey và thu được ước lượng trên không gian BMO cho giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz. Năm 2019, N. M. Chương, Đ. V. Dương và K. H. Dũng [N. M. Chuong, D. V. Duong, K. H. Dung (2019), *Weighted estimates for maximal operators, Riesz potential operator and commutators on p -adic Lebesgue and Morrey spaces*, p -Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.] đã thiết lập tính bị chặn cho thể vị p -adic Riesz và giao hoán tử của chúng trên không gian p -adic Morrey có trọng với các biểu trưng thuộc không gian tâm BMO có trọng. Gần đây nhất, Y. L. Shi và các cộng sự [Y. L. Shi, Y. F. Shi, S. B. Chen (2022), *p -Adic Riesz potential and its commutators on Morrey-Herz spaces*, J. Funct. Spaces] đưa ra các điều kiện đủ để thể vị p -adic Riesz bị chặn trên không gian p -adic Morrey-Herz.

Từ các vấn đề gợi mở ở trên, trong luận án này, chúng tôi mở rộng nghiên cứu lý thuyết các lớp toán tử Hausdorff và thể vị p -adic Riesz lên các không gian hàm tổng quát hơn. Kết quả của luận án được tổng hợp từ các bài báo [A1, A2, A3, A4, A5] đã được công bố trên các tạp chí chuyên ngành quốc tế uy tín: *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*; *Russian Journal of Mathematical Physics*; *Analysis and Mathematical Physics*; *Fractional Calculus and Applied Analysis*; *p -Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

3.1. Cơ sở lý thuyết

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về trường số p -adic, không gian vectơ $\mathbb{Q}_p^n$, một số không gian hàm được sử dụng trong luận án, lớp trọng Muckenhoupt, các bất đẳng thức giải tích, Trong Chương 3, chúng tôi có tham khảo các tài liệu [H. Brezis (2011), Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer, New-York], [G. B. Folland (1999), Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, A Wiley-Interscience Publication], [L. Grafakos (2008), Classical Fourier Analysis, Second Edition, Springer], [A. Yu. Khrennikov (1997), Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London], [G. O. Okikiolu (1971), Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L^p -Spaces, Academic Press, London, New-York], [A. M. Robert (2000), A Course In p -Adic Analysis, Springer], [M. H. Taibleson (1975), Fourier Analysis on Local Fields, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, University of Tokyo Press, Tokyo, Japan], [V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov (1994), p -Adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific].

3.2. Cách tiếp cận vấn đề nghiên cứu

Sau khi nghiên cứu các tài liệu liên quan đến toán tử Hausdorff và thể vị Riesz, bằng cách sử dụng các công cụ của giải tích thực, giải tích p -adic, lý thuyết không gian hàm, giải tích điều hòa hiện đại và sự kết hợp khéo léo các bất đẳng thức giải tích, chúng tôi đã tiếp cận và giải quyết được các vấn đề nghiên cứu đã đặt ra. Cụ thể như sau:

- Để nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff và thể vị Riesz trên các không gian hàm có trọng trên trường số thực và trường số p -adic, chúng tôi dựa vào định nghĩa của các không gian hàm đã cho, sử dụng thích hợp các phép biến đổi và kết hợp khéo léo các bất đẳng thức quan trọng trong giải tích để thu được kết quả. Đối với đánh giá bất đẳng thức ngược, chúng tôi sử dụng lược đồ mà J. Xiao đưa ra trong công trình [J. Xiao (2001), L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages, J. Math. Anal. Appl.], đó là xây dựng các hàm thử thích hợp trong các không gian hàm tương ứng để đưa ra các ước lượng dưới cho chuẩn của toán tử. Trên trường p -adic, chúng tôi cũng xây dựng các phương pháp tương thích kết hợp với cấu trúc tô-pô, độ đo tích phân đặc trưng của không gian $\mathbb{Q}_p^n$ để thu được kết quả mong muốn. Trong một số trường hợp, chúng tôi đã thu được chuẩn của toán tử.
- Để nghiên cứu tính bị chặn của các giao hoán tử, chúng tôi dựa trên phương pháp nổi tiếng được đề xuất bởi R. R. Coifman, R. Rochberg và G. Weiss trong công trình [R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss (1976), Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. Math.], trong đó, điểm mấu chốt là đưa về ước lượng dao động trung bình, sử dụng khéo léo các bất đẳng thức giải tích và kết hợp với một số kỹ thuật đặc trưng khi đánh giá toán tử Hausdorff và thể vị Riesz. Từ đó chúng tôi đã thu được các kết quả mong muốn.

CHƯƠNG 4

KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ PHÂN TÍCH, ĐÁNH GIÁ, THẢO LUẬN

4.1. Toán tử Hausdorff liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik và giao hoán tử trên không gian Morrey-Herz có trọng

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính bị chặn trên các không gian Morrey và Morrey-Herz có trọng lũy thừa của toán tử Hausdorff liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik và giao hoán tử của nó với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz được định nghĩa lần lượt như sau

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{A_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{t}\right)}{A_{\alpha,\beta}(x)} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

và

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}^b f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \left(b(x) - b\left(\frac{x}{t}\right)\right) \frac{A_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{t}\right)}{A_{\alpha,\beta}(x)} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

trong đó $A_{\alpha,\beta}(x) = (\sinh|x|)^{2\alpha+1}(\cosh|x|)^{2\beta+1}$, $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$ với $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\Phi \in L^1(0, \infty)$ và b là một hàm đo được trên $\mathbb{R}$.

Định lý 4.1.1. Cho $1 \leq q < \infty$, $-\frac{1}{q} \leq \lambda < 0$, và $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -1$.

(i) Nếu

$$\mathcal{C}_{1,\sup} = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+\frac{\gamma}{q}+\lambda(1+\gamma)}} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{A_{\alpha,\beta}(u)}{A_{\alpha,\beta}(tu)} \right)^{1-\frac{1}{q}} dt < \infty,$$

thì $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}$ bị chặn từ $\dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda,q}(\mathbb{R})$ vào chính nó. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}\|_{\dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda,q}(\mathbb{R}) \rightarrow \dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda,q}(\mathbb{R})} \leq \mathcal{C}_{1,\sup}.$$

(ii) Ngược lại, giả sử Φ là một hàm không âm trên $(0, \infty)$ và $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}$ là một toán tử bị chặn trên $\dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda,q}(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có

$$\mathcal{C}_{1,\inf} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1+\frac{\gamma}{q}+\lambda(1+\gamma)}} \inf_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{A_{\alpha,\beta}(u)}{A_{\alpha,\beta}(tu)} \right)^{1-\frac{1}{q}} dt < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}\|_{\dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda,q}(\mathbb{R}) \rightarrow \dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda,q}(\mathbb{R})} \geq \mathcal{C}_{1,\inf}.$$

Định lý 4.1.2. Cho $\delta \in \mathbb{R}$, $1 \leq q_2 < q_1 < \infty$ và $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -1$. Giả sử $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ hoặc $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ và

$$\mathcal{C}_2 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|\Psi(t)}{t^{1-\frac{1}{q_2}+(1+\gamma)(\lambda-\delta)}} dt < \infty,$$

trong đó

$$\Psi(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{(A_{\alpha,\beta}(u))^{q_2 - \frac{q_2}{q_1}}}{(A_{\alpha,\beta}(tu))^{q_2 - 1}} \right)^{\frac{q_1}{q_1 - q_2}} du \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1 q_2}}.$$

Khi đó, $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{p,q_1}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})$ vào $M\dot{K}_{p,q_2}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})$, và thỏa mãn

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}\|_{M\dot{K}_{p,q_1}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta}) \rightarrow M\dot{K}_{p,q_2}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})} \lesssim \mathcal{C}_2.$$

Đối với trường hợp $q_1 = q_2 = q$, chúng tôi sẽ thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}$ trên không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng.

Định lý 4.1.3. Cho $\delta \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < \infty$ và $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -1$.

(i) Nếu $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ hoặc $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ và

$$\mathcal{C}_{3,\text{sup}} = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{1}{q}+(1+\gamma)(\lambda-\delta)}} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{A_{\alpha,\beta}(u)}{A_{\alpha,\beta}(tu)} \right)^{1-\frac{1}{q}} dt < \infty,$$

thì $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{p,q}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})$ vào chính nó. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta}) \rightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})} \lesssim \mathcal{C}_{3,\text{sup}}.$$

(ii) Ngược lại, giả sử Φ là một hàm không âm trên $(0, \infty)$ và $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}$ là toán tử bị chặn trên $M\dot{K}_{p,q}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})$ với mọi $1 \leq p < \infty$, $\lambda = 0$ hoặc $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$. Khi đó, ta có

$$\mathcal{C}_{3,\text{inf}} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{1}{q}+(1+\gamma)(\lambda-\delta)}} \inf_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{A_{\alpha,\beta}(u)}{A_{\alpha,\beta}(tu)} \right)^{1-\frac{1}{q}} dt < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta}) \rightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\delta,\lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})} \gtrsim \mathcal{C}_{3,\text{inf}}.$$

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra tính bị chặn của $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}^b$ trên các không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz.

Định lý 4.1.4. Cho $1 \leq q < \infty$, $-\frac{1}{q} < \lambda_1, \lambda_2 < 0$, $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -1$ và $b \in \text{Lip}^\theta(\mathbb{R})$ với $0 < \theta \leq 1$. Giả sử rằng $\lambda_1 = \lambda_2 - \frac{\theta}{1+\gamma}$ và

$$\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)||t-1|^\theta}{t^{1+\frac{\gamma}{q}+\lambda_1(1+\gamma)+\theta}} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{A_{\alpha,\beta}(u)}{A_{\alpha,\beta}(tu)} \right)^{1-\frac{1}{q}} dt < \infty.$$

Khi đó, ta có toán tử $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}^b$ bị chặn từ $\dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda_1, q}(\mathbb{R})$ vào $\dot{M}_{\omega, A_{\alpha,\beta}}^{\lambda_2, q}(\mathbb{R})$.

Định lý 4.1.5. Cho $1 \leq q_2 < q_1 < \infty$, $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -1$ và $b \in \text{Lip}^\theta(\mathbb{R})$ với $0 < \theta \leq 1$. Giả sử $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ hoặc $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$ và $\delta_1 = \delta_2 + \frac{\theta}{1+\gamma}$. Nếu

$$\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|\Psi(t)|t-1|^\theta}{t^{1-\frac{1}{q_2}+(1+\gamma)(\lambda-\delta_1)+\theta}} dt < \infty,$$

trong đó $\Psi(t)$ được cho trong Định lý 4.1.2, thì $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}^b$ bị chặn từ $M\dot{K}_{p,q_1}^{\delta_1, \lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})$ vào $M\dot{K}_{p,q_2}^{\delta_2, \lambda}(\omega, A_{\alpha,\beta})$.

4.2. Toán tử Hausdorff tích suy rộng trên không gian Morrey-Herz hai trọng

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu toán tử Hausdorff tích suy rộng như sau:

Định nghĩa 4.2.1. Cho $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$; $\Phi : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$; $u, v : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow (0, +\infty)$; $s_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}$, $s_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm đo được sao cho $s_1(t_1) \neq 0$, $s_2(t_2) \neq 0$ với hầu khắp nơi $t_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $t_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Toán tử Hausdorff tích suy rộng được định nghĩa bởi

$$\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}(f)(x_1, x_2) = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) f(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2) \frac{u(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2)}{v(x_1, x_2)} dt_1 dt_2, \quad (4.3)$$

trong đó $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Nếu chọn $u \equiv v \equiv A_k$, với $A_k(x) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_+} |2 \sinh \langle \frac{\alpha}{2}, x \rangle|^{2k_\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ thì $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ trở thành toán tử Hausdorff tích liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik được định nghĩa bởi

$$\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k(f)(x_1, x_2) = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) f(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2) \frac{A_k(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2)}{A_k(x_1, x_2)} dt_1 dt_2, \quad (4.4)$$

trong đó $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Chú ý rằng, nếu ta chọn $\Phi(t_1, t_2) = \psi(t_1, t_2) \chi_{[0,1]^{n_1} \times [0,1]^{n_2}}(t_1, t_2)$, trong đó $\psi : [0, 1]^{n_1} \times [0, 1]^{n_2} \rightarrow [0, \infty)$, $u \equiv 1$, $v \equiv 1$, thì toán tử Hausdorff tích suy rộng $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ trở thành toán tử Hardy-Cesàro tích có dạng

$$\mathcal{H}_{\psi, s_1, s_2}(f)(x_1, x_2) = \iint_{[0,1]^{n_1} \times [0,1]^{n_2}} \psi(t_1, t_2) f(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2) dt_1 dt_2, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}. \quad (4.5)$$

Rõ ràng rằng, nếu chọn $\Phi(t_1, t_2) = \psi(t_1^1, t_2^1) \chi_{[0,1]^{n_1} \times [0,1]^{n_2}}(t_1, t_2)$, trong đó $\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $s_1(t_1) = t_1^1$, $s_2(t_2) = t_2^1$, với $t_1 = (t_1^1, \dots, t_1^{n_1})$, $t_2 = (t_2^1, \dots, t_2^{n_2})$, $u \equiv 1$, và $v \equiv 1$, thì $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ trở thành toán tử trung bình Hardy-Littlewood tích có trọng được nghiên cứu bởi M. Wei [M. Wei (2021), Estimates for product weighted Hardy-Littlewood average and its commutator on product central Morrey spaces, Mediterr. J. Math.] trên không gian tích có tâm Morrey. Toán tử này được định nghĩa như sau

$$\mathcal{H}_\psi(f)(x_1, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 \psi(t_1, t_2) f(t_1 x_1, t_2 x_2) dt_1 dt_2, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}. \quad (4.6)$$

Trong trường hợp đặc biệt, với $\psi \equiv 1$ và $n_1 = n_2 = 1$, toán tử trung bình Hardy-Littlewood tích có trọng trở thành toán tử Hardy tích được giới thiệu lần đầu tiên bởi E. Sawyer [E. Sawyer (1985), Weighted inequalities for the two-dimensional Hardy operator, Studia Mathematica] như sau

$$\mathcal{H}(f)(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad x_1, x_2 \neq 0. \quad (4.7)$$

Bây giờ, chúng tôi đưa ra các kết quả chính đầu tiên trong mục này liên quan đến tính bị chặn của toán tử Hausdorff tích suy rộng trên không gian tích có tâm Morrey hai trọng.

Định lý 4.2.2. Cho $1 \leq q_2 < q_1 < \infty$, $-\frac{1}{q_1} < \lambda_1 < 0$, $-\frac{1}{q_2} < \lambda_2 < 0$, $\gamma_1 > -n_1$, $\gamma_2 > -n_2$, và $\lambda_1 + \frac{1}{q_1} = \lambda_2 + \frac{1}{q_2}$. Cho ω_1 là một hàm trọng thỏa mãn $\omega_1(t_1x_1, t_2x_2) \lesssim |t_1|^{\gamma_1}|t_2|^{\gamma_2}\omega_1(x_1, x_2)$, và cho ω_2 là một hàm trọng tùy ý. Nếu

$$\mathcal{C}_4 = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} |\Phi(t_1, t_2)| \Upsilon(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{(n_i + \gamma_i)\lambda_2 + \frac{\gamma_i}{q_2}} dt_1 dt_2 < \infty,$$

thì toán tử $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ bị chặn từ $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda_1, q_1}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ vào $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda_2, q_2}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda_1, q_1}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda_2, q_2}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} \lesssim \mathcal{C}_4.$$

Trong trường hợp $q_1 = q_2 = q$, chúng tôi thu được các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff tích suy rộng $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ trên không gian tích có tâm Morrey hai trọng.

Định lý 4.2.3. Cho $1 \leq q < \infty$, $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$, $\gamma_1 > -n_1$, $\gamma_2 > -n_2$ và ω_2 là hàm trọng tùy ý.

(i) Nếu ω_1 là một hàm trọng thỏa $\omega_1(t_1x_1, t_2x_2) \lesssim |t_1|^{\gamma_1}|t_2|^{\gamma_2}\omega_1(x_1, x_2)$ và

$$\mathcal{C}_{4, \text{sup}} = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} |\Phi(t_1, t_2)| \Upsilon_{\text{sup}}(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{(n_i + \gamma_i)\lambda + \frac{\gamma_i}{q}} dt_1 dt_2 < \infty,$$

thì $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ là một toán tử bị chặn từ $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ vào chính nó. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} \lesssim \mathcal{C}_{4, \text{sup}}.$$

(ii) Ngược lại, giả sử rằng Φ là một hàm không âm, ω_1 là một hàm trọng thỏa mãn $\omega_1(t_1x_1, t_2x_2) \gtrsim |t_1|^{\gamma_1}|t_2|^{\gamma_2}\omega_1(x_1, x_2)$, và toán tử Hausdorff tích suy rộng $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ bị chặn từ $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ vào $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$. Khi đó, ta có

$$\mathcal{C}_{4, \text{inf}} = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) \Upsilon_{\text{inf}}(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{(n_i + \gamma_i)\lambda + \frac{\gamma_i}{q}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} \geq \mathcal{C}_{4, \text{inf}}.$$

Bởi Định lý 4.2.3, tính bị chặn của toán tử Hausdorff tích liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik trên không gian tích có tâm Morrey có trọng cũng được thiết lập.

Hệ quả 4.2.4. Cho $1 \leq q < \infty$, $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$, $\gamma_1 > -n_1$ và $\gamma_2 > -n_2$.

(i) Nếu ω là một hàm trọng thỏa mãn $\omega(t_1x_1, t_2x_2) \lesssim |t_1|^{\gamma_1}|t_2|^{\gamma_2}\omega(x_1, x_2)$ và

$$\mathcal{C}_{5, \text{sup}} = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} |\Phi(t_1, t_2)| \sup_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \left(\frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k\left(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)}\right)} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{(n_i + \gamma_i)\lambda + \frac{\gamma_i}{q}} dt_1 dt_2 < \infty,$$

thì $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k$ là một toán tử bị chặn từ $\dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ vào chính nó. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k\|_{\dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} \lesssim \mathcal{C}_{5, \text{sup}}.$$

(ii) Ngược lại, giả sử rằng Φ là một hàm không âm, ω là một hàm trọng thỏa mãn $\omega(t_1x_1, t_2x_2) \gtrsim |t_1|^{\gamma_1}|t_2|^{\gamma_2}\omega(x_1, x_2)$ và $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k$ bị chặn trên $\dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$. Khi đó

$$\mathcal{C}_{5,\inf} = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) \inf_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \left(\frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k\left(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)}\right)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{(n_i+\gamma_i)\lambda + \frac{\gamma_i}{q}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k\|_{\dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} \geq \mathcal{C}_{5,\inf}.$$

Chúng tôi cũng thu được ước lượng cho chuẩn của toán tử Hausdorff tích liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik trên không gian tích có tâm Morrey có trọng như sau.

Hệ quả 4.2.5. Cho $1 \leq q < \infty$, $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$, $\gamma_1 > -n_1$, $\gamma_2 > -n_2$, $\omega \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}$, Φ là một hàm không âm và

$$\sup_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k\left(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)}\right)} \leq C \inf_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k\left(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)}\right)},$$

với C là hằng số dương. Khi đó $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k$ là một toán tử bị chặn trên $\dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ nếu và chỉ nếu $\mathcal{C}_{5,\sup} < \infty$, trong đó $\mathcal{C}_{5,\sup}$ được định nghĩa trong Hệ quả 4.2.4. Hơn nữa, biểu thức sau đúng

$$\frac{1}{C^{1-\frac{1}{q}}} \mathcal{C}_{5,\sup} \leq \|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k\|_{\dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega, A_k}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} \leq \mathcal{C}_{5,\sup}.$$

Bởi Định lý 4.2.3, chúng tôi đưa ra chính xác chuẩn của toán tử Hardy-Cesàro tích và toán tử trung bình Hardy-Littlewood tích có trọng trên không gian tích có tâm Morrey hai trọng. Cụ thể, chúng tôi có kết quả sau.

Hệ quả 4.2.6. Cho $1 \leq q < \infty$; $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$; $\gamma_1, \beta_1 > -n_1$; $\gamma_2, \beta_2 > -n_2$; $\omega_1 \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}$; $\omega_2 \in \mathcal{W}_{\beta_1, \beta_2}$ và ψ là hàm không âm. Các khẳng định sau đây đúng

(i) $\mathcal{H}_{\psi, s_1, s_2}$ là toán tử bị chặn trên $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_6 = \iint_{[0,1]^{n_1} \times [0,1]^{n_2}} \psi(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{(n_i+\gamma_i)\lambda + \frac{\gamma_i - \beta_i}{q}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\psi, s_1, s_2}\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} = \mathcal{C}_6.$$

(ii) $\mathcal{H}_{\psi}$ là toán tử bị chặn trên $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_7 = \int_0^1 \int_0^1 \psi(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 t_i^{(n_i+\gamma_i)\lambda + \frac{\gamma_i - \beta_i}{q}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\psi}\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})} = \mathcal{C}_7.$$

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff tích

suy rộng $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ trên không gian tích Morrey-Herz thuần nhất hai trọng.

Định lý 4.2.7. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq q_2 < q_1 < \infty$, $\gamma_1 > -n_1$, $\gamma_2 > -n_2$, $\omega_1 \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}$ và ω_2 là một hàm trọng tùy ý. Giả sử $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ hoặc $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ và

$$\mathcal{C}_8 = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} |\Phi(t_1, t_2)| \Upsilon(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{-\frac{n_i}{q_2} + (n_i + \gamma_i) \frac{\lambda - \alpha}{n_1 + n_2}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Khi đó toán tử $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{p, q_1}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)$ vào $M\dot{K}_{p, q_2}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)$ và thỏa mãn

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}\|_{M\dot{K}_{p, q_1}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow M\dot{K}_{p, q_2}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)} \lesssim \mathcal{C}_8.$$

Trong trường hợp $q_1 = q_2 = q$, chúng tôi thu được các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff tích suy rộng trên không gian tích Morrey-Herz thuần nhất có hai trọng.

Định lý 4.2.8. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < \infty$, $\gamma_1 > -n_1$, $\gamma_2 > -n_2$, $\omega_1 \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}$, và cho ω_2 là một hàm trọng tùy ý.

(i) Nếu $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ hoặc $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ và

$$\mathcal{C}_{8, \text{sup}} = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} |\Phi(t_1, t_2)| \Upsilon_{\text{sup}}(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{-\frac{n_i}{q} + (n_i + \gamma_i) \frac{\lambda - \alpha}{n_1 + n_2}} dt_1 dt_2 < \infty,$$

thì toán tử $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)$ vào chính nó. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}\|_{M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)} \lesssim \mathcal{C}_{8, \text{sup}}.$$

(ii) Ngược lại, giả sử Φ là một hàm không âm và $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}$ là toán tử bị chặn trên $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)$ với mọi $1 \leq p < \infty$ và $\lambda = 0$ hoặc $0 < p < \infty$ và $\lambda > 0$. Khi đó,

$$\mathcal{C}_{8, \text{inf}} = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) \Upsilon_{\text{inf}}(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{-\frac{n_i}{q} + (n_i + \gamma_i) \frac{\lambda - \alpha}{n_1 + n_2}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^{u, v}\|_{M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega_1, \omega_2)} \geq \mathcal{C}_{8, \text{inf}}.$$

Áp dụng Định lý 4.2.8, chúng tôi đưa ra ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff tích trên không gian tích Morrey-Herz thuần nhất có trọng liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik. Cụ thể hơn, khẳng định sau đây là đúng.

Hệ quả 4.2.9. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < \infty$, $\gamma_1 > -n_1$, $\gamma_2 > -n_2$, $\omega \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}$ và Φ là một hàm không âm. Giả sử $1 \leq p < \infty$, $\lambda = 0$ hoặc $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$ và

$$\sup_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)})} \leq C \inf_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)})},$$

với hằng số dương C . Khi đó $\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k$ là toán tử bị chặn trên $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}(\omega, A_k)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_9 = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{-\frac{n_i}{q} + (n_i + \gamma_i) \frac{\lambda - \alpha}{n_1 + n_2}} \sup_{\substack{y_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}}} \left(\frac{A_k(y_1, y_2)}{A_k(\frac{y_1}{s_1(t_1)}, \frac{y_2}{s_2(t_2)})} \right)^{1 - \frac{1}{q}} dt_1 dt_2 < \infty,$$

Hơn nữa

$$\frac{1}{C^{1-\frac{1}{q}}} \mathcal{C}_9 \leq \|\mathcal{H}_{\Phi, s_1, s_2}^k\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega, A_k) \rightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega, A_k)} \leq \mathcal{C}_9.$$

Chúng tôi cũng đạt được ước lượng chuẩn của toán tử Hardy-Cesàro tích và toán tử trung bình Hardy-Littlewood tích có trọng trên không gian tích Morrey-Herz thuần nhất hai trọng.

Hệ quả 4.2.10. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < \infty$, $\gamma_1, \beta_1 > -n_1$, $\gamma_2, \beta_2 > -n_2$, $\omega_1 \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}$, $\omega_2 \in \mathcal{W}_{\beta_1, \beta_2}$, và ψ là một hàm không âm. Giả sử $1 \leq p < \infty$ và $\lambda = 0$ hoặc $0 < p < \infty$ và $\lambda > 0$. Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng

(i) $\mathcal{H}_{\psi, s_1, s_2}$ là toán tử bị chặn trên $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_{10} = \iint_{[0,1]^{n_1} \times [0,1]^{n_2}} \psi(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 |s_i(t_i)|^{-\frac{n_i+\beta_i}{q} + (n_i+\gamma_i)\frac{\lambda-\alpha}{n_1+n_2}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\psi, s_1, s_2}\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)} \simeq \mathcal{C}_{10}.$$

(ii) $\mathcal{H}_{\psi}$ là toán tử bị chặn trên $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \psi(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 t_i^{-\frac{n_i+\beta_i}{q} + (n_i+\gamma_i)\frac{\lambda-\alpha}{n_1+n_2}} dt_1 dt_2 < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\psi}\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)} \simeq \mathcal{C}_{11}.$$

4.3. Toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính trên các không gian hàm và một số áp dụng

Mục đích chính của phần này là nghiên cứu các điều kiện cần và đủ loại sup-inf cho tính bị chặn trên không gian tâm Morrey hai trọng và không gian Herz hai trọng của toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ có dạng

$$\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p(\vec{f})(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \varphi(t) \prod_{i=1}^m f_i(s_i(t)x) dt, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.8)$$

trong đó $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ là các hàm đo được theo độ đo Haar, $\varphi : \mathbb{Q}_p^d \rightarrow \mathbb{C}$, và $s_i : \mathbb{Q}_p^d \rightarrow \mathbb{Q}_p$ là các hàm đo được theo độ đo Haar thỏa mãn $s_i(t) \neq 0$ với hầu khắp nơi $t \in \mathbb{Q}_p^d$.

Từ các kết quả chính, chúng tôi đạt được ước lượng chuẩn trên không gian Herz hai trọng của toán tử p -adic Hardy-Littlewood đa tuyến tính và toán tử tích phân m -tuyến tính p -adic đa tuyến tính lần lượt có dạng sau

$$\mathcal{H}_{\psi}^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{Z}_p^*)^m} \psi(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m f_i(t_i x) dt_1 \dots dt_m, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.9)$$

và

$$\mathcal{T}_K^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} K(|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) dy_1 \dots dy_m, \quad x \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Bây giờ, chúng tôi đưa ra các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính trên không gian tâm Morrey hai trọng.

Định lý 4.3.1. *Cho $1 \leq q, q_i < \infty$, $\beta, \beta_i > -n$, $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$ và $-\frac{1}{q_i} < \lambda_i < 0$, với mọi $i = 1, \dots, m$. Giả sử rằng ω, ω_i là các hàm trọng tùy ý, và $v(x) = |x|_p^\beta$, $v_i(x) = |x|_p^{\beta_i}$ sao cho*

$$\sum_{i=1}^m (n + \beta_i) \left(\lambda_i + \frac{1}{q_i} \right) = (n + \beta) \left(\lambda + \frac{1}{q} \right) \text{ và } \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i} = \frac{1}{q}.$$

(i) Nếu

$$\mathcal{C}_{12,\text{sup}} = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \Omega_{\text{sup}}(y) |\varphi(y)| \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{(n+\beta_i)\lambda_i + \frac{\beta_i}{q_i}} dy < \infty, \quad (4.10)$$

thì toán tử $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}(\mathbb{Q}_p^n)$. Hơn nữa

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i} \rightarrow \dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}} \leq \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{C}_{12,\text{sup}},$$

trong đó

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\prod_{i=1}^m (1 - p^{-n})^{\lambda_i}}{(1 - p^{-n})^\lambda} \cdot \frac{(p^{(n+\beta)} - 1)^{\lambda + \frac{1}{q}}}{\prod_{i=1}^m (p^{(n+\beta_i)} - 1)^{\lambda_i + \frac{1}{q_i}}}.$$

(ii) Cho φ là một hàm không âm. Khi đó, nếu $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}(\mathbb{Q}_p^n)$

thì ta có

$$\mathcal{C}_{12,\text{inf}} = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \Omega_{\text{inf}}(y) \varphi(y) \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{(n+\beta_i)\lambda_i + \frac{\beta_i}{q_i}} dy < \infty, \quad (4.11)$$

và

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i} \rightarrow \dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}} \geq \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{C}_{12,\text{inf}},$$

trong đó

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\prod_{i=1}^m (p^{(n+\beta_i)(\lambda_i q_i + 1)} - 1)^{\frac{1}{q_i}}}{(p^{(n+\beta)(\lambda q + 1)} - 1)^{\frac{1}{q}}} \cdot \mathcal{A}_1.$$

Đặc biệt, nếu $\omega(x) = |x|_p^\gamma$ và $\omega_i(x) = |x|_p^{\gamma_i}$ sao cho $\frac{\gamma}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i}$, thì ta có

$$\Omega_{\text{sup}}(y) = \Omega_{\text{inf}}(y) = \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{-\frac{\gamma_i}{q_i}},$$

với mọi $y \in \mathbb{Q}_p^d$. Do đó, bởi Định lý 4.3.1, ta có kết quả sau.

Định lý 4.3.2. Giả sử các giả thiết của Định lý 4.3.1 đúng. Cho φ là một hàm không âm và $\omega(x) = |x|_p^\gamma$, $\omega_i(x) = |x|_p^{\gamma_i}$ thỏa $\gamma, \gamma_i > -n$, với $i = 1, \dots, m$ sao cho

$$\frac{\gamma}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i}.$$

Khi đó, toán tử $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}(\mathbb{Q}_p^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{A} = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \varphi(y) \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{(n+\beta_i)\lambda_i + \frac{\beta_i - \gamma_i}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa, trong trường hợp này, ta có

$$\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{A} \leq \|\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i} \rightarrow \dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}} \leq \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}.$$

Bởi Định lý 4.3.2, lập tức ta đạt được hệ quả sau.

Hệ quả 4.3.3. Giả sử các giả thiết của Định lý 4.3.2 đúng. Các khẳng định sau đây là đúng.

(i) Toán tử $\mathcal{H}_{\psi}^{p, m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}(\mathbb{Q}_p^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{B}_1 = \int_{(\mathbb{Z}_p^*)^m} \psi(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m |t_i|_p^{(n+\beta_i)\lambda_i + \frac{\beta_i - \gamma_i}{q_i}} dt_1 \dots dt_m < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{B}_1 \leq \|\mathcal{H}_{\psi}^{p, m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i} \rightarrow \dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}} \leq \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{B}_1.$$

(ii) Toán tử $\mathcal{T}_K^{p, m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{B}_2 = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} K(1, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) \prod_{i=1}^m |y_i|_p^{(n+\beta_i)\lambda_i + \frac{\beta_i - \gamma_i}{q_i}} dy_1 \dots dy_m < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{B}_2 \leq \|\mathcal{T}_K^{p, m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i, \omega_i}^{\lambda_i, q_i} \rightarrow \dot{M}_{v, \omega}^{\lambda, q}} \leq \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{B}_2.$$

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ trên không gian p -adic Herz thuần nhất hai trọng.

Định lý 4.3.4. Cho $1 \leq \ell, \ell_i, q, q_i < \infty$, $\beta, \beta_i > -n$ và $\alpha, \alpha_i \in \mathbb{R}$, với mọi $i = 1, \dots, m$. Cho ω, ω_i là các trọng tùy ý, và $v(x) = |x|_p^\beta$, $v_i(x) = |x|_p^{\beta_i}$ sao cho

$$\sum_{i=1}^m (n + \beta_i) \alpha_i = (n + \beta) \alpha, \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i} = \frac{1}{q} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{\ell_i} = \frac{1}{\ell}.$$

(i) Nếu

$$\mathcal{C}_{13, \text{sup}} = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \Omega_{\text{sup}}(y) |\varphi(y)| \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{-\left(\frac{n+\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n}{q_i}} dy < \infty,$$

thì $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^n)$. Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} \leq \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{C}_{13, \text{sup}},$$

trong đó

$$\mathcal{A}_3 = \frac{(1 - p^{-n})^{\frac{\alpha}{n}}}{\prod_{i=1}^m (1 - p^{-n})^{\frac{\alpha_i}{n}}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p^{n+\beta_i} - 1)^{\frac{\alpha_i}{n}}}{(p^{n+\beta} - 1)^{\frac{\alpha}{n}}}.$$

(ii) Giả sử rằng φ là một hàm không âm và $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^n)$. Ta có

$$\mathcal{C}_{13, \text{inf}} = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \Omega_{\text{inf}}(y) \varphi(y) \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{-\left(\frac{n+\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} \geq \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{C}_{13, \text{inf}}.$$

Bởi Định lý 4.3.4, chúng tôi thu được chuẩn của toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính trên không gian p -adic Herz thuần nhất hai trọng với các trọng lũy thừa.

Định lý 4.3.5. *Giả sử các giả thiết của Định lý 4.3.4 đúng. Cho φ là một hàm không âm và $\omega(x) = |x|_p^\gamma$, $\omega_i(x) = |x|_p^{\gamma_i}$ với $\gamma, \gamma_i > -n$, với $i = 1, \dots, m$ sao cho*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}.$$

Khi đó, $\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p$ là toán tử bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_{14} = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \varphi(y) \prod_{i=1}^m |s_i(y)|_p^{-\left(\frac{n+\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, \vec{s}}^p\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{C}_{14} \cdot \mathcal{A}_3.$$

Áp dụng kết quả của Định lý 4.3.5, ta thu được chuẩn của toán tử p -adic Hardy-Littlewood đa tuyến tính có trọng và toán tử tích phân m -tuyến tính p -adic trên không gian Herz hai trọng.

Hệ quả 4.3.6. *Giả sử các giả thiết của Định lý 4.3.5 đúng. Các khẳng định sau đây là đúng.*

(i) Toán tử $\mathcal{H}_{\psi}^{p, m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_{15} = \int_{(\mathbb{Z}_p^*)^m} \psi(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m |t_i|_p^{-\left(\frac{n+\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n+\gamma_i}{q_i}} dt_1 \dots dt_m < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}_{\psi}^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{C}_{15} \cdot \mathcal{A}_3.$$

(ii) Toán tử $\mathcal{T}_K^{p,m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_{16} = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} K(1, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) \prod_{i=1}^m |y_i|_p^{-\left(\frac{n+\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy_1 \dots dy_m < \infty.$$

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{T}_K^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{C}_{16} \cdot \mathcal{A}_3.$$

Chúng tôi đưa ra một vài áp dụng từ các kết quả về tính bị chặn của toán tử tích phân m -tuyến tính p -adic $\mathcal{T}_K^{p,m}$ trên không gian Herz hai trọng.

(i) Ta đặt

$$K(|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) = \frac{1}{\max\{|x|_p, |y_1|_p\} \dots \max\{|x|_p, |y_m|_p\}}.$$

Khi đó, $\mathcal{T}_K^{p,m}$ trở thành toán tử m -tenxơ tuyến tính p -adic Hardy-Littlewood-Pólya được định nghĩa như sau: với mọi $x \in \mathbb{Q}_p^*$,

$$\mathcal{Q}^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} \frac{f_1(y_1) \dots f_m(y_m)}{\max\{|x|_p, |y_1|_p\} \dots \max\{|x|_p, |y_m|_p\}} dy_1 \dots dy_m.$$

Mặt khác, nếu

$$K(|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) = \frac{1}{(\max\{|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p\})^m}$$

khi đó $\mathcal{T}_K^{p,m}$ trở thành toán tử m -phi tenxơ tuyến tính p -adic Hardy-Littlewood-Pólya có dạng

$$\mathcal{Q}^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} \frac{f_1(y_1) \dots f_m(y_m)}{(\max\{|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p\})^m} dy_1 \dots dy_m, \quad x \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Hệ quả 4.3.7. Cho $1 \leq \ell, \ell_i, q, q_i < \infty$, $\beta, \beta_i, \gamma, \gamma_i > -n$ và $\alpha, \alpha_i \in \mathbb{R}$, với mọi $i = 1, \dots, m$. Cho $v(x) = |x|_p^\beta$ và $v_i(x) = |x|_p^{\beta_i}$, $\omega(x) = |x|_p^\gamma$, $\omega_i(x) = |x|_p^{\gamma_i}$ sao cho

$$\sum_{i=1}^m (n + \beta_i) \alpha_i = (n + \beta) \alpha, \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i} = \frac{1}{q}, \quad \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{\ell_i} = \frac{1}{\ell}.$$

Ký hiệu $\zeta_i := -\left(\frac{n+\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n+\gamma_i}{q_i}$, $\zeta := -\left(\frac{n+\beta}{n}\right)\alpha - \frac{n+\gamma}{q}$. Các khẳng định sau đây là đúng.

(a) Toán tử $\mathcal{Q}^{p,m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu $-1 < \zeta_i < 0$, với mọi $i = 1, \dots, m$.

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{Q}^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{A}_3 \cdot \prod_{i=1}^m \frac{(1 - p^{-1})^2}{(1 - p^{\zeta_i})(1 - p^{-\zeta_i - 1})}.$$

(b) Toán tử $\mathcal{Q}^{p,m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu $\zeta < 0$ và $\zeta_i > -1$ với mọi $i = 1, \dots, m$.

Hơn nữa,

$$\|\mathbf{Q}^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{A}_3 \cdot \frac{1-p^{-m}}{1-p^\zeta} \prod_{i=1}^m \frac{(1-p^{-1})}{(1-p^{-(\zeta_i+1)})}.$$

(ii) Ta chọn

$$K(|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{|x|_p + |y_i|_p} \right).$$

Do đó $\mathcal{T}_K^{p,m}$ trở thành toán tử m -tenxơ tuyến tính p -adic Hilbert có dạng

$$\mathcal{H}^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} \frac{f_1(y_1) \dots f_m(y_m)}{(|x|_p + |y_1|_p) \dots (|x|_p + |y_m|_p)} dy_1 \dots dy_m, \quad x \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Tương tự, với

$$K(|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) = \frac{1}{(|x|_p + |y_1|_p + \dots + |y_m|_p)^m},$$

khi đó $\mathcal{T}_K^{p,m}$ trở thành toán tử m -phi tenxơ tuyến tính p -adic Hilbert như sau

$$\mathbf{H}^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} \frac{f_1(y_1) \dots f_m(y_m)}{(|x|_p + |y_1|_p + \dots + |y_m|_p)^m} dy_1 \dots dy_m, \quad x \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Hệ quả 4.3.8. Giả sử các giả thiết của Hệ quả 4.3.7 đúng. Các khẳng định sau đây đúng

- (a) $\mathcal{H}^{p,m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu
 $-1 < \zeta_i < 0$, với mọi $i = 1, \dots, m$.

Hơn nữa,

$$\|\mathcal{H}^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{A}_3 \cdot (1-p^{-1})^m \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p^{-k\zeta_i} + p^{k(\zeta_i+1)})}{1+p^k} \right).$$

- (b) $\mathbf{H}^{p,m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu
 $\zeta < 0$, $\zeta_i > -1$, với mọi $i = 1, \dots, m$.

Hơn nữa,

$$\|\mathbf{H}^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{A}_3 \cdot \int_{(\mathbb{Q}_p^*)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |y_i|_p^{\zeta_i}}{(1 + |y_1|_p + \dots + |y_m|_p)^m} dy_1 \dots dy_m.$$

(iii) Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu toán tử m -tuyến tính p -adic Hardy bởi cách đặt

$$K(|x|_p, |y_1|_p, \dots, |y_m|_p) = |x|_p^{-m} \chi_{\{|(y_1, \dots, y_m)|_p \leq |x|_p\}} (|y_1|_p, \dots, |y_m|_p).$$

Khi đó, $\mathcal{T}_K^{p,m}$ trở thành toán tử m -tuyến tính p -adic Hardy được định nghĩa bởi

$$\mathfrak{H}^{p,m}(f_1, \dots, f_m)(x) = \frac{1}{|x|_p^m} \int_{|(y_1, \dots, y_m)|_p \leq |x|_p} f_1(y_1) \dots f_m(y_m) dy_1 \dots dy_m, \quad x \in \mathbb{Q}_p^*.$$

Từ Hệ quả 4.3.6 kéo theo rằng $\mathfrak{H}^{p,m}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i}(\mathbb{Q}_p^*)$ vào $\dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}(\mathbb{Q}_p^*)$ nếu và chỉ nếu

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^*)^m} \prod_{i=1}^m |y_i|_p^{\zeta_i} dy_1 \dots dy_m = \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{Z}_p^*} |y_i|_p^{\zeta_i} dy_i \right) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \zeta_i > -1, \text{ với mọi } i = 1, \dots, m.$$

Trong trường hợp này, ta đạt được

$$\|\mathfrak{H}^{p,m}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i, \omega_i}^{\alpha_i, \ell_i, q_i} \rightarrow \dot{K}_{v, \omega}^{\alpha, \ell, q}} = \mathcal{A}_3 \cdot \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{Z}_p^*} |y_i|_p^{\zeta_i} dy_i \right) = \mathcal{A}_3 \cdot \prod_{i=1}^m \left(\frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-(\zeta_i + 1)}} \right).$$

4.4. Thế vị p -adic Riesz và giao hoán tử trên không gian p -adic Morrey-Herz hai trọng

Trong mục này, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho tính bị chặn trên không gian Morrey-Herz hai trọng của thế vị p -adic Riesz có dạng sau

$$I_\alpha^p(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(y)}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy,$$

trong đó $f : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_n(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-n}}{1-p^{-\alpha}}$, với p là số nguyên tố và $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hơn nữa, một vài ước lượng cho giao hoán tử của thế vị p -adic Riesz có dạng

$$I_\alpha^{p,b}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(y)(b(x) - b(y))}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

trên không gian loại này với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz và không gian tâm BMO có trọng được thiết lập.

Định lý 4.4.1. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q^*, \zeta < \infty$, $\lambda \geq 0$, $\gamma > -n$, α là số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{\zeta}{q}\right)$, $v(x) = |x|_p^\gamma$ và $\omega \in A_\zeta(\mathbb{Q}_p^n)$ với chỉ số tới hạn r_ω cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử $q > q^* \zeta r'_\omega$, $\delta \in (1, r_\omega)$, và $\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{n \operatorname{Re} \alpha}{n + \gamma}$. Nếu

$$\left(\frac{n + \gamma}{n}\right) \lambda - \frac{n \delta - 1}{q \delta} + \operatorname{Re} \alpha < \left(\frac{n + \gamma}{n}\right) \sigma_1 < n\left(1 - \frac{\zeta}{q}\right), \quad (4.12)$$

thì I_α^p là toán tử bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell, q}^{\sigma_1, \lambda}(v, \omega)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell, q^*, q}^{\sigma_2, \lambda}(v, \omega)$.

Định lý 4.4.2. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q^*, \zeta < \infty$, $\lambda \geq 0$, $b \in \operatorname{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)$, với $0 < \beta \leq 1$, và α là số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{\zeta}{q}\right)$. Cho $v(x) = |x|_p^\gamma$ với $\gamma > -n$ và $\omega \in A_\zeta(\mathbb{Q}_p^n)$ với chỉ số tới hạn r_ω cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử $q > q^* \zeta r'_\omega$, $\delta \in (1, r_\omega)$, và $\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{n(\beta + \operatorname{Re} \alpha)}{n + \gamma}$. Nếu điều kiện (4.12) đúng, trong đó $\operatorname{Re} \alpha$ được thay thế bởi $(\beta + \operatorname{Re} \alpha)$ trong Định lý 4.4.1, thì

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{\ell, q^*, q}^{\sigma_2, \lambda}(v, \omega)} \lesssim \|b\|_{\operatorname{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{M\dot{K}_{\ell, q}^{\sigma_1, \lambda}(v, \omega)},$$

với mọi $f \in M\dot{K}_{\ell, q}^{\sigma_1, \lambda}(v, \omega)$.

Định lý 4.4.3. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q_1, q_2, q^*, \zeta < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, α là số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{\zeta}{q}\right)$, $b \in \operatorname{CMO}_\omega^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\lambda \geq 0$, $v(x) = |x|_p^\gamma$ với $\gamma > -n$ và $\omega \in A_\zeta(\mathbb{Q}_p^n)$ với chỉ số tới hạn r_ω cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử $q > q^* \zeta r'_\omega$, $\delta \in (1, r_\omega)$, và $\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{n \operatorname{Re} \alpha}{n + \gamma}$. Nếu

$$\left(\frac{n + \gamma}{n}\right) \lambda - \frac{n \delta - 1}{q_1 \delta} + \operatorname{Re} \alpha < \left(\frac{n + \gamma}{n}\right) \sigma_1 < n\left(1 - \frac{\zeta}{q_1}\right), \quad (4.13)$$

thì $I_\alpha^{p,b}$ là toán tử bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q_1}^{\sigma_1,\lambda}(v,\omega)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q_1}^{\sigma_2,\lambda}(v,\omega)$. Hơn nữa,

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q_1}^{\sigma_2,\lambda}(v,\omega)} \lesssim \|b\|_{\text{CMO}_\omega^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{M\dot{K}_{\ell,q_1}^{\sigma_1,\lambda}(v,\omega)}.$$

Nếu chọn $\lambda = 0$ trong Định lý 4.4.1, Định lý 4.4.2 và Định lý 4.4.3, ta thu được điều kiện đủ cho tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz và các giao hoán tử trên không gian p -adic Herz thuần nhất hai trọng.

Hệ quả 4.4.4. *Giả sử các giả thiết của Định lý 4.4.1 đúng. Nếu*

$$\text{Re } \alpha - \frac{n}{q} \frac{\delta - 1}{\delta} < \left(\frac{n + \gamma}{n} \right) \sigma_1 < n \left(1 - \frac{\zeta}{q} \right),$$

thì I_α^p là toán tử bị chặn từ $\dot{K}_{v,\omega}^{\sigma_1,\ell,q}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{v,\omega}^{\sigma_2,\ell,q^*,q}(\mathbb{Q}_p^n)$.

Hệ quả 4.4.5. *Giả sử các giả thiết của Định lý 4.4.2 đúng. Nếu*

$$\beta + \text{Re } \alpha - \frac{n}{q} \frac{\delta - 1}{\delta} < \left(\frac{n + \gamma}{n} \right) \sigma_1 < n \left(1 - \frac{\zeta}{q} \right),$$

thì

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\dot{K}_{v,\omega}^{\sigma_2,\ell,q^*,q}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|b\|_{\text{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{\dot{K}_{v,\omega}^{\sigma_1,\ell,q}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Hệ quả 4.4.6. *Giả sử các giả thiết của Định lý 4.4.3 đúng. Nếu*

$$\text{Re } \alpha - \frac{n}{q_1} \frac{\delta - 1}{\delta} < \left(\frac{n + \gamma}{n} \right) \sigma_1 < n \left(1 - \frac{\zeta}{q_1} \right),$$

thì

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,\ell,q^*,q_1}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|b\|_{\text{CMO}_\omega^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,\ell,q_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Áp dụng Định lý 4.4.1, ta thu được tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz trên không gian p -adic Morrey và Morrey-Herz hai trọng lũy thừa. Để có được các kết quả này, ta cần sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 4.4.7. *Chỉ số tới hạn cho điều kiện Hölder ngược của hàm $\omega(x) = |x|_p^\theta$ với $\theta \geq 0$ là $r_\omega = +\infty$.*

Ta có $w(x) = |x|_p^\theta \in A_\zeta(\mathbb{Q}_p^n)$ với mọi $\zeta > 1 + \frac{\theta}{n}$. Áp dụng Định lý 4.4.1, ta thu được một số điều kiện đủ cho tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz trên không gian p -adic Morrey-Herz thuần nhất hai trọng lũy thừa.

Định lý 4.4.8. *Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q^* < \infty$, $\lambda \geq 0$, $v(x) = |x|_p^\gamma$ với $\gamma > -n$, và $\omega(x) = |x|_p^\theta$ với $\theta \geq 0$, α là một số phức với $0 < \text{Re } \alpha < n \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{\theta}{nq} \right)$. Nếu $q > q^* \left(1 + \frac{\theta}{n} \right)$ và*

$$\left(\frac{n + \gamma}{n} \right) \lambda - \frac{n}{q} + \text{Re } \alpha < \left(\frac{n + \gamma}{n} \right) \sigma_1 < n \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{\theta}{nq} \right), \quad (4.14)$$

khi đó I_α^p là một toán tử bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q}^{\sigma_2,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)$, trong đó $\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{n \cdot \text{Re } \alpha}{n + \gamma}$.

Đặc biệt, $v = \omega = 1$, ta thu được tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz trên không gian p -adic Morrey-Herz.

Hệ quả 4.4.9. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q^* < \infty$, $\lambda \geq 0$, α là một số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$.

Nếu $q > q^*$ và

$$\lambda - \frac{n}{q} + \operatorname{Re} \alpha < \sigma_1 < n\left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad (4.15)$$

thì I_α^p là toán tử bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q}^{\sigma_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$, ở đó $\sigma_2 = \sigma_1 - \operatorname{Re} \alpha$.

Nhận xét 4.4.10. Chú ý rằng trong trường hợp $q < q^*$ và $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}$, tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz trên không gian p -adic Morrey-Herz được nghiên cứu bởi Shi và cộng sự [Y. L. Shi, Y. F. Shi, S. B. Chen (2022), p -Adic Riesz potential and its commutators on Morrey-Herz spaces, J. Funct. Spaces].

Theo Định lý 4.4.2 và Định lý 4.4.3, ta thu được tính bị chặn của giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz và không gian tâm BMO có trọng lũy thừa trên không gian p -adic Morrey-Herz thuần nhất hai trọng.

Định lý 4.4.11. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q^* < \infty$, $\lambda \geq 0$, $v(x) = |x|_p^\gamma$ với $\gamma > -n$, và $\omega = |x|_p^\theta$ với $\theta \geq 0$, α là số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{\theta}{nq}\right)$, $b \in \operatorname{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)$, với $0 < \beta \leq 1$. Nếu $q > q^*\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)$ và

$$\beta + \left(\frac{n+\gamma}{n}\right)\lambda - \frac{n}{q} + \operatorname{Re} \alpha < \left(\frac{n+\gamma}{n}\right)\sigma_1 < n\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{\theta}{nq}\right),$$

thì $I_\alpha^{p,b}$ là toán tử bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q}^{\sigma_2,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)$, trong đó $\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{n(\beta + \operatorname{Re} \alpha)}{n+\gamma}$. Hơn nữa,

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q}^{\sigma_2,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)} \lesssim \|b\|_{\operatorname{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)}.$$

Định lý 4.4.12. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q_1, q_2, q^* < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, $\lambda \geq 0$. Cho $v(x) = |x|_p^\gamma$ với $\gamma > -n$, $\omega(x) = |x|_p^\theta$ với $\theta \geq 0$, α là một số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{\theta}{nq}\right)$, và $b \in \operatorname{CMO}_\omega^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$. Nếu $q > q^*\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)$ và

$$\left(\frac{n+\gamma}{n}\right)\lambda - \frac{n}{q_1} + \operatorname{Re} \alpha < \left(\frac{n+\gamma}{n}\right)\sigma_1 < n\left(1 - \frac{1}{q_1} - \frac{\theta}{nq_1}\right),$$

khi đó $I_\alpha^{p,b}$ là toán tử bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q_1}^{\sigma_1,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q_1}^{\sigma_2,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)$, trong đó $\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{n\operatorname{Re} \alpha}{n+\gamma}$. Hơn nữa,

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q_1}^{\sigma_2,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)} \lesssim \|b\|_{\operatorname{CMO}_{|x|_p^\theta}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(|x|_p^\gamma, |x|_p^\theta)}.$$

Cho $v = \omega = 1$, ta thu được tính bị chặn cho giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz và không gian tâm BMO có trọng trên không gian p -adic Morrey-Herz.

Hệ quả 4.4.13. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q^* < \infty$ và $\lambda \geq 0$, α là số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$, $b \in \operatorname{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)$, với $0 < \beta \leq 1$. Nếu $q > q^*$ và

$$\beta + \lambda - \frac{n}{q} + \operatorname{Re} \alpha < \sigma_1 < n\left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

thì giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz $I_\alpha^{p,b}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q}^{\sigma_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$, trong đó $\sigma_2 = \sigma_1 - (\beta + \operatorname{Re} \alpha)$. Hơn nữa,

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q}^{\sigma_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|b\|_{\operatorname{Lip}^\beta(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{M\dot{K}_{\ell,q}^{\sigma_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Hệ quả 4.4.14. Cho $0 < \ell < \infty$, $1 \leq q, q_1, q_2, q^* < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, $\lambda \geq 0$, α là một số phức với $0 < \operatorname{Re} \alpha < n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$, và $b \in \operatorname{CMO}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$. Nếu $q > q^*$ và

$$\lambda - \frac{n}{q_1} + \operatorname{Re} \alpha < \sigma_1 < n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right),$$

thì giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz $I_\alpha^{p,b}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{\ell,q_1}^{\sigma_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q_1}^{\sigma_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$, trong đó $\sigma_2 = \sigma_1 - \operatorname{Re} \alpha$. Hơn nữa,

$$\|I_\alpha^{p,b}(f)\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{\ell,q^*,q_1}^{\sigma_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|b\|_{\operatorname{CMO}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)} \|f\|_{M\dot{K}_{\ell,q_1}^{\sigma_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

4.5. Thể vị p -adic Riesz với nhân thô và các giao hoán tử trên không gian p -adic Morrey và Herz hai trọng

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz với nhân thô và giao hoán tử với các biểu trưng thuộc không gian tâm BMO có trọng lần lượt có dạng sau

$$I_{\alpha,\Omega}^p(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{\Omega(|y|_p y) f(y)}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy, \quad (4.16)$$

và

$$I_{\alpha,\Omega}^{p,b}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{(b(x) - b(y)) \Omega(|y|_p y) f(y)}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.17)$$

trên không gian p -adic Morrey, Herz hai trọng.

Định lý 4.5.1. Cho $1 \leq \ell, q, \zeta_1, \zeta_2 < \infty$, $\lambda \in (-\frac{1}{q}, 0)$ và $\Omega \in L^{\ell'}(S_0)$. Cho $\omega_1 \in A_{\zeta_1}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\omega_2 \in A_{\zeta_2}(\mathbb{Q}_p^n)$, với chỉ số tới hạn tương ứng r_{ω_1} , r_{ω_2} cho điều kiện Hölder ngược, sao cho $\omega_2(B_k) \leq \omega_1(B_k)$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Giả sử $q > \ell \zeta_2 r'_{\omega_2}$, $\delta_1 \in (1, r_{\omega_1})$, $\delta_2 \in (1, r_{\omega_2})$, và α là số phức thỏa điều kiện

$$0 < \operatorname{Re} \alpha < \min \left\{ \frac{n}{q} \left(\frac{\delta_2 - 1}{\delta_2} - \zeta_1 \right) - n\lambda \frac{\delta_1 - 1}{\delta_1}; n \left(\frac{1}{\ell} - \frac{\zeta_2}{q} \right) \right\}. \quad (4.18)$$

Khi đó, $I_{\alpha,\Omega}^p$ là một toán tử bị chặn từ $\dot{M}_{\omega_1,\omega_2}^{\lambda,q}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{M}_{\omega_1,\omega_2}^{\lambda,\ell,\frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)$, và thỏa mãn

$$\|I_{\alpha,\Omega}^p(f)\|_{\dot{M}_{\omega_1,\omega_2}^{\lambda,\ell,\frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{\ell'}(S_0)} \|f\|_{\dot{M}_{\omega_1,\omega_2}^{\lambda,q}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Định lý 4.5.2. Cho $0 < s < \infty$, $1 \leq \ell, q, \zeta_1, \zeta_2 < \infty$ và $\Omega \in L^{\ell'}(S_0)$. Cho $\omega_1 \in A_{\zeta_1}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\omega_2 \in A_{\zeta_2}(\mathbb{Q}_p^n)$ với các chỉ số tới hạn lần lượt là r_{ω_1} , r_{ω_2} cho điều kiện Hölder ngược, sao cho $\omega_2(B_k) \leq \omega_1(B_k)$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Giả sử $q > \ell \zeta_2 r'_{\omega_2}$, $\delta_1 \in (1, r_{\omega_1})$, $\delta_2 \in (1, r_{\omega_2})$ và α là một số phức thỏa điều kiện

$$0 < \operatorname{Re} \alpha < \min \left\{ \frac{n}{q} \frac{\delta_2 - 1}{\delta_2}; n \left(\frac{1}{\ell} - \frac{\zeta_2}{q} \right) \right\}. \quad (4.19)$$

Nếu

$$\frac{\sigma_1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{\sigma_2}{n} + \frac{1}{\ell}, \quad (4.20)$$

và

$$\operatorname{Re} \alpha - \frac{n \delta_2 - 1}{q \delta_2} < \zeta_1 \sigma_1 < n \left(1 - \frac{\zeta_2}{q} \right), \quad (4.21)$$

khi đó $I_{\alpha, \Omega}^p$ là toán tử bị chặn từ $\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_1, s, q}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_2, s, \ell, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)$. Hơn nữa,

$$\|I_{\alpha, \Omega}^p(f)\|_{\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_2, s, \ell, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{\ell'}(S_0)} \|f\|_{\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_1, s, q}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Định lý 4.5.3. Cho $1 \leq \ell, q, q_1, q_2, \zeta_1, \zeta_2 < \infty$, $\lambda \in (-\frac{1}{q_1}, 0)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ và $\Omega \in L^{\ell'}(S_0)$. Cho $\omega_1 \in A_{\zeta_1}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\omega_2 \in A_{\zeta_2}(\mathbb{Q}_p^n)$, với chỉ số tới hạn lần lượt là r_{ω_1} , r_{ω_2} cho điều kiện Hölder ngược sao cho $\omega_2(B_k) \leq \omega_1(B_k)$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$ và $b \in \operatorname{CMO}_{\omega_2}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$. Giả sử $q > \ell \zeta_2 r'_{\omega_2}$, $\delta_1 \in (1, r_{\omega_1})$, $\delta_2 \in (1, r_{\omega_2})$, và α là một số phức thỏa

$$0 < \operatorname{Re} \alpha < \min \left\{ \frac{n}{q_1} \left(\frac{\delta_2 - 1}{\delta_2} - \zeta_1 \right) - n \lambda \frac{\delta_1 - 1}{\delta_1}; n \left(\frac{1}{\ell} - \frac{\zeta_2}{q} \right) \right\}. \quad (4.22)$$

Khi đó, $I_{\alpha, \Omega}^{p, b}$ là một toán tử bị chặn từ $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, \ell, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)$. Hơn nữa,

$$\|I_{\alpha, \Omega}^{p, b}(f)\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, \ell, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{\ell'}(S_0)} \|b\|_{\operatorname{CMO}_{\omega_2}^{q_2}} \|f\|_{\dot{M}_{\omega_1, \omega_2}^{\lambda, q_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

Định lý 4.5.4. Cho $0 < s < \infty$, $1 \leq \ell, q, q_1, q_2, \zeta_1, \zeta_2 < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ và $\Omega \in L^{\ell'}(S_0)$. Cho $\omega_1 \in A_{\zeta_1}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\omega_2 \in A_{\zeta_2}(\mathbb{Q}_p^n)$ với chỉ số tới hạn lần lượt là r_{ω_1} , r_{ω_2} cho điều kiện Hölder ngược sao cho $\omega_2(B_k) \leq \omega_1(B_k)$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$ và $b \in \operatorname{CMO}_{\omega_2}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$. Giả sử $q > \ell \zeta_2 r'_{\omega_2}$, $\delta_1 \in (1, r_{\omega_1})$, $\delta_2 \in (1, r_{\omega_2})$ và α là một số phức thỏa

$$0 < \operatorname{Re} \alpha < \min \left\{ \frac{n}{q_1} \frac{\delta_2 - 1}{\delta_2}; n \left(\frac{1}{\ell} - \frac{\zeta_2}{q} \right) \right\}. \quad (4.23)$$

Nếu

$$\frac{\sigma_1}{n} + \frac{1}{q_1} = \frac{\sigma_2}{n} + \frac{1}{\ell}, \quad (4.24)$$

và

$$\operatorname{Re} \alpha - \frac{n \delta_2 - 1}{q_1 \delta_2} < \zeta_1 \sigma_1 < n \left(1 - \frac{\zeta_2}{q_1} \right). \quad (4.25)$$

Khi đó, $I_{\alpha, \Omega}^{p, b}$ là một toán tử bị chặn từ $\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_1, s, q_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ vào $\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_2, s, \ell, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)$. Hơn nữa,

$$\|I_{\alpha, \Omega}^{p, b}(f)\|_{\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_2, s, \ell, \frac{\operatorname{Re} \alpha}{n}}(\mathbb{Q}_p^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{\ell'}(S_0)} \|b\|_{\operatorname{CMO}_{\omega_2}^{q_2}} \|f\|_{\dot{K}_{\omega_1, \omega_2}^{\sigma_1, s, q_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

CHƯƠNG 5

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Luận án nghiên cứu tính bị chặn và ước lượng chuẩn cho một số lớp toán tử Hausdorff, thế vị Riesz và các giao hoán tử của chúng trên một số không gian hàm. Các kết quả đạt được của luận án bao gồm:

- Đưa ra các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn trên không gian Morrey và Morrey-Herz có trọng lũy thừa của toán tử Hausdorff liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik có dạng

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{A_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{t}\right)}{A_{\alpha,\beta}(x)} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

trong đó $A_{\alpha,\beta}(x) = (\sinh|x|)^{2\alpha+1}(\cosh|x|)^{2\beta+1}$, $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$ với $\alpha > -\frac{1}{2}$, và $\Phi \in L^1(0, \infty)$. Một số kết quả mà chúng tôi đưa ra là mở rộng các kết quả nghiên cứu của S. S. Mondal và A. Poria [S. S. Mondal, A. Poria (2022), Hausdorff operators associated with the Opdam-Cherednik transform in Lebesgue space, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.]. Hơn nữa, chúng tôi cũng đưa các điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử Hausdorff liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik có dạng

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\Phi}^b f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \left(b(x) - b\left(\frac{x}{t}\right)\right) \frac{A_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{t}\right)}{A_{\alpha,\beta}(x)} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

trên không gian Morrey và Morrey-Herz có trọng lũy thừa với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz.

- Giới thiệu toán tử Hausdorff tích suy rộng có dạng

$$\mathcal{H}_{\Phi,s_1,s_2}^{u,v}(f)(x_1, x_2) = \iint_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} \Phi(t_1, t_2) f(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2) \frac{u(s_1(t_1)x_1, s_2(t_2)x_2)}{v(x_1, x_2)} dt_1 dt_2,$$

với $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Trong đó $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$; $\Phi : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{C}$; $u, v : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow (0, +\infty)$; $s_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}$, $s_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm đo được sao cho $s_1(t_1) \neq 0, s_2(t_2) \neq 0$ với hầu khắp nơi $t_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, t_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Nếu chọn hàm Φ và các hàm trọng u, v phù hợp thì toán tử Hausdorff tích suy rộng trở thành toán tử Hausdorff tích liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik, toán tử Hardy-Cesàro tích, toán tử trung bình Hardy-Littlewood tích có trọng và toán tử Hardy tích. Đồng thời, chúng tôi nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff tích suy rộng trên không gian tích Morrey, và Morrey-Herz hai trọng. Từ các kết quả chính, chúng tôi thu được ước lượng chuẩn cho toán tử Hausdorff tích liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik và các công thức tường minh cho các chuẩn của toán tử trung bình Hardy-Littlewood tích có trọng và toán tử Hardy-Cesàro tích trên các không gian loại này.

- Đưa ra các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn trên không gian Morrey, Herz hai trọng của toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính có dạng

$$\mathcal{H}_{\varphi,\vec{s}}^p(\vec{f})(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \varphi(t) \prod_{i=1}^m f_i(s_i(t)x) dt, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

trong đó $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ là các hàm đo được theo độ đo Haar, $\varphi : \mathbb{Q}_p^d \rightarrow \mathbb{C}$, và $s_i : \mathbb{Q}_p^d \rightarrow \mathbb{Q}_p$ là các hàm đo được theo độ đo Haar thỏa mãn $s_i(t) \neq 0$ với hầu khắp nơi $t \in \mathbb{Q}_p^n$. Từ kết quả chính, chúng tôi cũng thu được ước lượng chuẩn của các toán tử p -adic Hilbert đa tuyến tính, toán tử p -adic Hardy đa tuyến tính, toán tử p -adic Hardy-Littlewood-Pólya đa tuyến tính trên các không gian Morrey và Herz hai trọng. Kết quả của chúng tôi mở rộng và củng cố các kết quả trước đó do Batbold và cộng sự [T. Batbold, Y. Sawano, G. Tumendemberel (2022), Sharp bounds for certain m -linear integral operators on p -adic function spaces, Filomat] đưa ra.

- Thiết lập các điều kiện đủ cho tính bị chặn trên không gian Morrey-Herz hai trọng với các hàm trọng thuộc lớp trọng lũy thừa và trọng Muckenhoupt của thể vị p -adic Riesz có dạng

$$I_\alpha^p(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(y)}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy,$$

trong đó $f : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_n(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-n}}{1-p^{-\alpha}}$, với p là số nguyên tố và $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hơn nữa, chúng tôi cũng đưa các ước lượng Lipschitz và ước lượng tâm BMO có trọng của các giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz có dạng

$$I_\alpha^{p,b}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{f(y)(b(x) - b(y))}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

trên không gian Morrey-Herz hai trọng.

- Thiết lập các điều kiện đủ cho tính bị chặn trên không gian Morrey và Herz hai trọng với các hàm trọng thuộc lớp trọng Muckenhoupt của thể vị p -adic Riesz với nhân thô có dạng

$$I_{\alpha,\Omega}^p(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{\Omega(|y|_p y) f(y)}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy,$$

trong đó $f : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ và $\Omega : S_0 \rightarrow \mathbb{C}$ là các hàm đo được. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử của thể vị p -adic Riesz với nhân thô có dạng

$$I_{\alpha,\Omega}^{p,b}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \frac{(b(x) - b(y))\Omega(|y|_p y) f(y)}{|x - y|_p^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

trên các không gian này với các biểu trưng thuộc không gian tâm BMO có trọng.

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan có thể tiếp tục được nghiên cứu. Cụ thể như sau:

- Mở rộng nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff liên kết với biến đổi Opdam-Cherednik trên một số không gian hàm có trọng với lớp trọng thuần nhất, lớp trọng Muckenhoupt, và lớp trọng tùy ý, trên không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.
- Nghiên cứu tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử Hausdorff tích suy rộng và của toán tử p -adic Hausdorff đa tuyến tính trên một số không gian hàm tổng quát hơn.
- Thiết lập các điều kiện cần cho tính bị chặn của thể vị p -adic Riesz và thể vị p -adic Riesz với nhân thô trên một số không gian hàm.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA NCS

- [A1] **Ngo Thi Hong**, Dao Van Duong (2024). Estimates for Hausdorff operator associated with the Opdam-Cherednik transform and its commutator on weighted Morrey-Herz spaces, *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, **15**(62), 23 pages (**ISI-Q2 Scimago, Impact factor: 0.9**)
- [A2] Dao Van Duong, **Ngo Thi Hong** (2024). Generalized product Hausdorff operator on two-weighted Morrey-Herz spaces, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **31**(3), 418-437 (**ISI-Q2 Scimago, Impact factor: 1.2**)
- [A3] Dao Van Duong, **Ngo Thi Hong** (2022). Multilinear Hausdorff operator on p -adic functional spaces and its applications, *Analysis and Mathematical Physics*, **12**(86), 22 pages (**ISI-Q2 Scimago, Impact factor: 1.4**)
- [A4] **Ngo Thi Hong**, Dao Van Duong (2023). Two-weighted estimates for p -adic Riesz potential and its commutators on Morrey-Herz spaces, *Fractional Calculus Applied Analysis*, **26**, 2618-2650 (**ISI-Q1 Scimago, Impact factor: 2.7**)
- [A5] **Ngo Thi Hong**, Ly Kim Ha, Dao Van Duong (2025). Boundedness for p -adic Riesz potential with rough kernel and its commutators on two-weighted Morrey, Herz spaces, *p -Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, **17**(1), 42-61 (**ISI-Q2 Scimago, Impact factor: 0.5**)